Concursul Fractal

A Șaptea Ediție, 19 Octombrie 2025

Problema 1. Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie sunt 100 de căsuțe, inițial goale. Între prima și a doua căsuță este desenat semnul înmulțirii, între a doua și a treia semnul adunării, apoi iar semnul înmulțirii, apoi iar semnul adunării și așa mai departe. Când jocul începe, fiecare jucător, începând cu Marius, scrie într-o căsuță goală un număr de la 1 la 100, care nu a mai fost scris încă. După 100 de mutări, se calculează rezultatul operației. Dacă rezultatul e par, câștigă Alexandru, dacă nu, Marius. Cine dintre cei doi jucători poate câștiga garantat?

Soluție: Considerăm 50 de căsuțe formate din câte 2 pătrățele vecine. Alexandru poate câștiga, iar pentru aceasta trebuie de fiecare dată când Marius pune un număr impar într-o căsuță, el să pună un număr par în aceeași căsuță și viceversa. În final se adună 50 de numere pare, deci rezultatul e par.

Problema 2. Arătați că pentru orice pereche de numere naturale a și x există numere naturale c și b astfel încât $a^2 + x = \frac{c^2+x}{b^2+x}$

Soluție: Observăm că

$(a^2+x)(b^2+x) = (ab)^2+x^2+x(a^2+b^2) = (ab)^2+2abx+x^2+x(a^2+b^2-2ab) = (ab+x)^2+x(a-b)^2$

Și deci, alegând $b = a+1$, avem $(a^2+x)((a+1)^2+x) = (a^2+a+x)^2+x$

Problema 3. În triunghiul ABC, fie X, Y și Z picioarele perpendicularelor duse din A, B și C respectiv, iar H-ortocentrul acestuia. Fie M_1 și M_2 mijloacele segmentelor BC și AH Arătați că M_1M_2 este mediatoarea segmentului YZ.

Soluție: Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Este clar că OM_1 este perpendicular pe BC și deci e paralel cu AM_2. La fel, putem afla de exemplu din teorema sinusului în triunghiurile BOM și ABH că $AM_2 = OM_1$, deci patrulaterul format de cele 4 puncte este un paralelogram. Astfel, M_1M_2 este paralel cu OA, deci este perpendicular pe YZ. La fel, $M_1Y = \frac{BC}{2} = M_1Z$, deci M_1M_2 e perpendiculară în triunghiul isoscel M_1YZ, deci este și mediatoare.

Problema 4. Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b și c:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{a^2+ac+c^2}\geq \frac{1}{3}(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}})$$

Soluție: Pasul cheie e să considerăm:

$$S_1=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{a^2+ac+c^2} \text{ și } S_2=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{a^2+ac+c^2}$$

Avem $S_1-S_2=\sum\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\sum a-b=0$. Astfel, $S_1=S_2$, și deci $2S_1=S_1+S_2$, deci e suficient să arătăm că:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2+ac+c^2}\geq \frac{2}{3}(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}})$$

, dar pentru aceasta vom arăta fiecare termen în parte, și anume că $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ și analooagele. Împărțindambele părți la b și notând $\frac{a}{b}=x$, vrem să arătăm că $\frac{x^3+1}{x^2+x+1}\geq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$, sau ridicând ambele părți la pătrat: $9(x^3+1)^2\geq 2(x^2+1)(x^2+x+1)^2$, ce se rezolvă clar din inegalitatea mediilor, sau factorizând diferența ca $(x-1)^2$ pe lângă un polinom strict pozitiv.